Limite de suites de solutions d'une équation

Exercice 1 [02290] [Correction]
Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$.

a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 [02288] [Correction]
Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
Étudier la limite de (x_n).

Exercice 3 [02291] [Correction]
Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.

b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 4 [02292] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$E_n : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

a) Montrer que l'équation E_n possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$ et que $x_n \in [1/2\,;1]$

b) Montrer que (x_n) converge.

c) Déterminer la limite de (x_n).

Exercice 5 [00314] [Correction]
Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

possède une unique racine x_n dans $]0\,;+\infty[$. Déterminer $\lim x_n$.

Exercice 6 [00315] [Correction]
Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ définit une suite positive (u_n) unique.
Étudier sa convergence et préciser sa limite.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \tan x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $]-\pi/2\,;\pi/2[$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique

$$x_n = f^{-1}(n)$$

b) On a $x_n + \tan x_n = n$ avec $x_n \in]-\pi/2\,;\pi/2[$ donc

$$x_n = \arctan(n - x_n)$$

Or $n - x_n \to +\infty$ car (x_n) bornée et donc

$$x_n \to \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
f est dérivable et $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$ donc f est strictement croissante.
$f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède une unique solution x_n.
$x_n = f^{-1}(n) \to +\infty$.

Exercice 3 : [énoncé]

a) Le tableau de variation de $f_n : x \mapsto x^n \ln x$ permet d'affirmer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et que de plus $x_n \in [1\,;+\infty[$.

b) $1 = x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} = x_{n+1} f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \leq 1 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \leq x_n$ car f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons ℓ sa limite, on a $\ell \geq 1$
Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \ln x_n \geq \ell^n \ln \ell \to +\infty$ ce qui est absurde car $x_n^n \ln x_n = 1$. Il reste $\ell = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]

a) Introduisons la fonction

$$f_n : x \mapsto x^n + \cdots + x$$

qui est continue, strictement croissante et vérifie

$$f_n(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

La fonction f_n réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers $[0\,;+\infty[$, par suite l'équation E_n possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$.
Puisque

$$f_n(1/2) = \frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2} < 1 \text{ et } f_n(1) = n \geq 1$$

on a $x_n \in [1/2\,;1]$.

b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \cdots + x_n^2 + x_n = x_n(x_n^n + \cdots + x_n) + x_n = 2x_n \geq 1$$

donc

$$x_{n+1} \leq x_n$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

c) Posons $\ell = \lim x_n$. Puisque $x_2 < 1$, $x_n \leq x_2$ donne à la limite $\ell < 1$.

$$1 = x_n^n + \cdots + x_n = x_n \frac{1-x_n^n}{1-x_n}$$

donne à la limite

$$1 = \frac{\ell}{1-\ell}$$

car $0 \leq x_n^n \leq x_2^n \to 0$ et finalement

$$\ell = 1/2$$

Exercice 5 : [énoncé]
On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On observe que $f_n(0) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f'_{n+1} = f_n$. La propriété est vrai pour $n = 1$ et si elle est vrai au rang n, le tableau de signe de f_n permet d'assurer que f_{n+1} est décroissante (et donc strictement négative) sur $[0\,;x_n]$ puis strictement croissante sur $[x_n\,;+\infty]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que f s'annule en un $x_{n+1} > x_n$ et celui-ci est unique.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

La suite (x_n) est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel ℓ et $\frac{x_n^n}{n!} \to 0$. Or la suite de terme général est $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!}$ est croissante et strictement positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite (x_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 6 : [énoncé]
L'étude des variations de la fonction $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$ assure l'existence et l'unicité de $u_n > 0$ vérifiant la relation

$$nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$$

De plus on peut affirmer $u_n \geq 1$.
Puisque

$$u_n^n(n(u_n - 1) - 1) = 1 \text{ et } u_n^n \geq 1$$

on a

$$n(u_n - 1) - 1 \leq 1$$

puis

$$0 \leq u_n - 1 \leq 2/n$$

permet de conclure $u_n \to 1$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD